

Analyse fréquentielle d'un système linéaire

11

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la fonction de transfert d'un montage électrique. On verra comment elle se représente en pratique et les différentes types de fonction de transfert qui existent.

1 Représentation graphique de la fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système, $\underline{H}(j\omega)$, indique comment un système modifie l'amplitude et la phase d'un signal en fonction de sa pulsation ω , en régime permanent sinusoïdal.

Pour saisir d'un coup l'influence d'un système sur un signal, on utilise la représentation graphique de la fonction de transfert, nommée **diagramme de Bode**¹, qui contient deux graphiques : l'un représente la variation de $|\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de ω , l'autre celle de $\arg(\underline{H}(j\omega))$.

1.1 Le gain en décibel

Le rapport des amplitudes des signaux de sortie et d'entrée, exprimé de façon logarithmique, est en **décibel**². Il est nommé **gain en décibel** G_{dB} du système à la pulsation ω :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \right|.$$



Le log opère sur un réel positif, ainsi est-ce bien le module de \underline{H} qui intervient dans la formule.

1. inventés par Hendrik Wade Bode, 1905 – 1982, ingénieur américain dont les travaux présentèrent des avancées majeures en automatique et en télécommunications.

2. nommé en l'honneur d'Alexandre Graham Bell, 1847 – 1922, professeur de phonologie à l'université de Boston, qui déposa le brevet du téléphone en 1876.

Le lecteur latiniste s'étonnera du préfixe déci utilisé dans le décibel, alors que le log est multiplié par 20. Le **décibel** fut à l'origine introduit pour exprimer des rapports de puissance. En notant \mathcal{P}_E la puissance du signal d'entrée et \mathcal{P}_S celle du signal de sortie, le rapport de puissance s'écrit en décibel avec le facteur 10 caractéristique du préfixe déci :

$$\left(\frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_E} \right)_{dB} = 10 \log \frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_E}.$$

Or la puissance d'un signal est proportionnelle à la valeur efficace au carré de ce signal. La constante de proportionnalité s'élimine lorsqu'on passe au rapport :

$$\left(\frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_E} \right)_{dB} = 10 \log \frac{S_{eff}^2}{E_{eff}^2} = 20 \log \frac{S_{eff}}{E_{eff}}.$$

Pour un rapport de tensions, le log est donc multiplié par 20 dans une expression en décibel.

1.2 La phase

Il s'agit simplement de :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)).$$

1.3 Relevés expérimentaux

Avec la notation complexe des signaux d'entrée et de sortie du système, $\underline{e}(t) = E_0 \exp(j\omega t)$ et $\underline{s}(t) = S_0 \exp(j\varphi) \exp(j\omega t)$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{S_0}{E_0} \exp(j\varphi).$$

Le gain du système est donc simplement lié au rapport des amplitudes des signaux :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \frac{S_0}{E_0} = 20 \log \frac{S_{eff}}{E_{eff}} = 20 \log \frac{S_{CC}}{E_{CC}},$$

où S_{CC} représente l'amplitude crête à crête du signal, double de l'amplitude.

Quant à la phase, il s'agit du déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

Exemple

Sur l'exemple du circuit RC présenté au paragraphe 2.2 du précédent chapitre, page 339, on relève les valeurs :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \frac{32,9 \cdot 10^{-3}}{1,0} = -29,7 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \varphi = -88^\circ.$$

Le signe de φ s'explique par le retard de la sortie sur l'entrée.

1.4 Exemples de diagramme de Bode

On trace, pour le système RC du premier ordre dont on a calculé la fonction de transfert à la page 355, $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ en fonction du produit $RC\omega$, en échelle semilogarithmique, car seul l'axe des abscisses est gradué logarithmiquement : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$ donc :

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{1+jRC\omega}\right),$$

et :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\right) = -20 \log\left(\sqrt{1+(RC\omega)^2}\right) = -10 \log\left(1+(RC\omega)^2\right).$$

La variable $RC\omega$ est choisie pour l'axe des abscisses car c'est ce produit qui intervient dans la fonction de transfert. Attendu que le produit RC s'exprime en s et ω en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $RC\omega$ est en rad, c'est à dire qu'il est sans dimension. Les courbes de gain et de phase sont les suivantes :

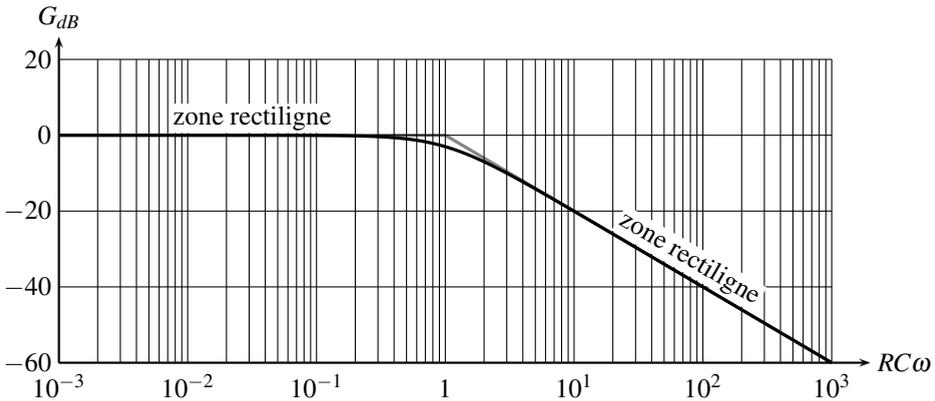


Figure 11.1 – Gain du système (les asymptotes sont en gris).

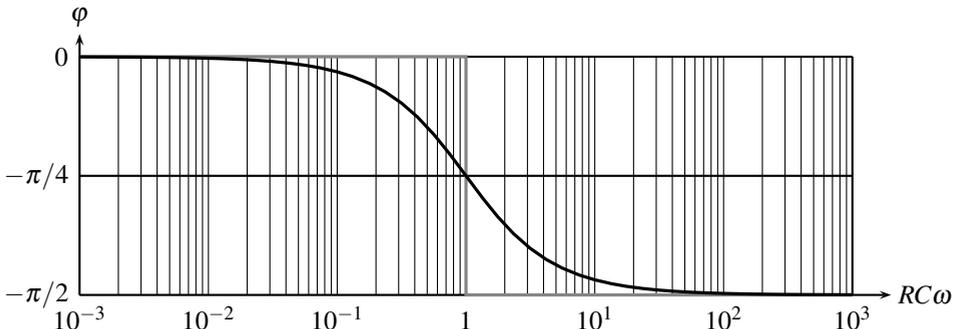


Figure 11.2 – Phase du système (les asymptotes sont en gris).

On observe des zones rectilignes dans le diagramme dans Bode, qui sont interprétables simplement avec l'expression de la fonction de transfert. Elles correspondent pour le gain $G(\omega) = |H(j\omega)|$, en échelles logarithmiques, à des lois de puissance en $G(\omega) = \alpha\omega^n$ (voir annexe mathématique page 1081).

Afin d'interpréter simplement ces zones rectilignes, on se propose :

- de simplifier la fonction de transfert ;
- d'interpréter le graphe du gain en décibel en fonction de ω ;
- d'interpréter de même le graphe de la phase en fonction de ω .

Simplification de la fonction de transfert Elle s'écrit $H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$. Le dénominateur est la somme de deux termes, 1 et $jRC\omega$. À quelle condition l'un est-il prédominant devant l'autre en module ? 1 est beaucoup plus petit que $RC\omega = |jRC\omega|$ dès que :

$$1 \ll RC\omega \quad \text{soit} \quad \omega \gg \frac{1}{RC}, \quad \text{en pratique} \quad \omega > \frac{10}{RC}.$$

De même 1 est beaucoup plus grand que $RC\omega = |jRC\omega|$ dès que :

$$1 \gg RC\omega \quad \text{soit} \quad \omega \ll \frac{1}{RC}, \quad \text{en pratique} \quad \omega < \frac{1}{10RC}.$$

Dès lors, $\frac{1}{RC}$ apparaît comme la pulsation caractéristique du système, qui délimite deux comportements limites ou asymptotiques :

domaine de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{RC}$	$\frac{1}{RC} \ll \omega$
$H(j\omega) \simeq$	1	$\frac{1}{jRC\omega}$

Les deux expressions limites de $H(j\omega)$ sont appelées **fonctions de transfert asymptotiques**.

Interprétation des zones rectilignes de la courbe de gain Pour $\omega \ll \frac{1}{RC}$, on observe un segment horizontal. En effet, la fonction de transfert y vaut $H(j\omega) \simeq 1$ et $20\log(1) = 0$. Le gain en décibel reste constamment nul.

Pour $\omega \gg \frac{1}{RC}$, on observe un segment oblique. Le gain en décibel vaut dans cet intervalle de pulsation :

$$G_{dB}(\omega) = 20\log\left|\frac{1}{jRC\omega}\right| = 20\log\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = -20\log(RC\omega).$$

Que vaut-il une **décade** plus loin, c'est à dire quand la pulsation est multipliée par 10 ?

$$G_{dB}(10\omega) = -20\log(RC \times 10\omega) = -20\log(10) - 20\log(RC\omega)$$

$$G_{dB}(10\omega) = G_{dB}(\omega) - 20.$$

Le gain diminue de 20 dB en une décade, la pente du segment oblique vaut donc **-20 dB/décade**. Une telle valeur de la pente est matérialisée sur le diagramme de Bode par l'expression -20 dB/décade en toutes lettres ou le nombre -1, sous-entendu pour -1×20 dB/décade. Une diminution de -20 dB/décade correspond à une amplitude du signal de sortie divisée par 10 lorsque la fréquence est multipliée par 10.

	domaine de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{RC}$	$\frac{1}{RC} \ll \omega$
En résumé :	$\underline{H}(j\omega) \simeq$	1	$\frac{1}{jRC\omega}$
	pente	nulle	-20 dB/décade

Les deux zones rectilignes du diagramme de Bode sont formées des asymptotes, qui se croisent en la pulsation caractéristique du filtre. En effet, quand les deux asymptotes se croisent :

$$1 = \left| \frac{1}{jRC\omega} \right| \quad \text{implique} \quad 1 = \frac{1}{RC\omega}, \quad \text{soit} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Interprétation des zones rectilignes de la courbe de phase Pour $\omega \ll \frac{1}{RC}$, on observe une phase $\varphi = 0$. En effet, la fonction de transfert y vaut $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$ et $\varphi = \arg(1) = 0$.

Pour $\omega \gg \frac{1}{RC}$, on observe une phase $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. La fonction de transfert vaut alors $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{1}{jRC\omega}$ et ainsi :

$$\varphi = \arg\left(\frac{1}{jRC\omega}\right) = \arg(1) - \arg(jRC\omega) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

	domaine de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{RC}$	$\frac{1}{RC} \ll \omega$
En résumé :	$\underline{H}(j\omega) \simeq$	1	$\frac{1}{jRC\omega}$
	$\varphi(\omega) \simeq$	0	$-\frac{\pi}{2}$

1.5 Tracé à la calculatrice

Comment tracer simplement un diagramme en échelles semilogarithmiques ? Il suffit de se souvenir qu'on trace le gain et la phase en fonction de $\log \omega$. On convertit alors les échelles linéaires en échelles logarithmiques avec la transformation $\omega = 10^x$, qui est la réciproque de $x = \log \omega$. On trace donc à la calculatrice, par exemple pour le gain, en fonction de x :

$$x \mapsto 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (RC10^x)^2}}.$$

Lorsqu'on lit $x = 2$ sur l'axe des abscisses, il faut ainsi comprendre $\omega = 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$.

2 Différents types de fonction de transfert

Il existe un très grand nombre de filtres, seuls les plus simples seront abordés.

2.1 Filtres du premier ordre

a) Passe-bas et intégrateur

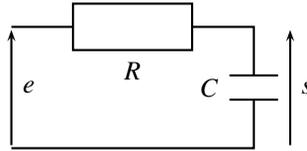


Figure 11.3 – Passe-bas du premier ordre.

La fonction de transfert du filtre étudié est, avec $RC = \tau$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega},$$

ou, avec la notation de Laplace vue en cours de SII ($p = j\omega$) :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}.$$

La fonction de transfert se simplifie pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ et $\omega \gg \frac{1}{\tau}$. Dans le cas où $\omega \gg \frac{1}{\tau}$:

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{1}{j\tau\omega},$$

et le signal d'entrée est intégré. En effet :

$$\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\tau\omega} \quad \text{donc} \quad j\tau\omega \underline{s}(t) = \underline{e}(t),$$

soit en notation temporelle :

$$\tau \frac{ds}{dt} = e(t) \quad \text{ou} \quad s(t) = \frac{1}{\tau} \int e(t) dt.$$

Cette équivalence a été vue dans le précédent chapitre, paragraphe 3.2. Ainsi, la sortie est l'intégrale de l'entrée, à condition que ω soit très supérieure à $\frac{1}{\tau}$, par exemple $\omega > \frac{10}{\tau}$.

Un filtre passe-bas se comporte en **intégrateur** pour tout signal de pulsation très supérieure à la pulsation caractéristique du filtre.

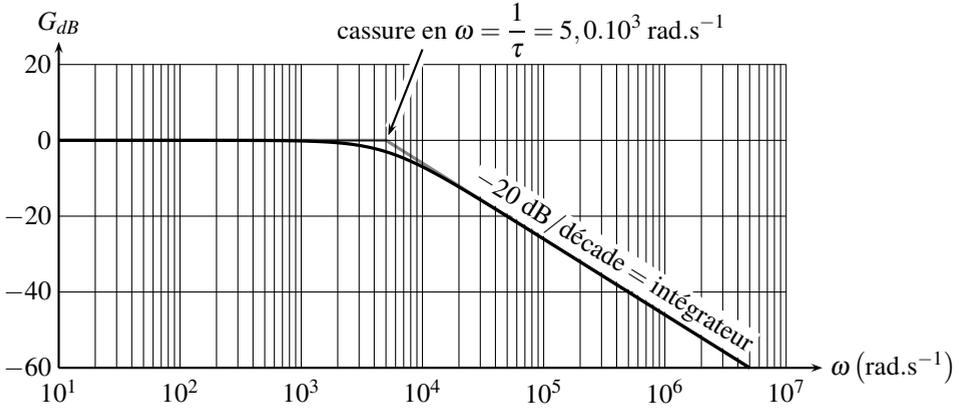


Figure 11.4 – Gain d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où $\tau = 2,0 \cdot 10^{-4}$ s (les asymptotes sont en gris).

De plus, la phase vaut en $\omega = \frac{1}{\tau}$ vaut $-\frac{\pi}{4}$:

$$\underline{H}\left(\frac{j}{\tau}\right) = \frac{1}{1+j} \quad \text{donc} \quad \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) = \arg(1) - \arg(1+j) = 0 - \frac{\pi}{4}.$$

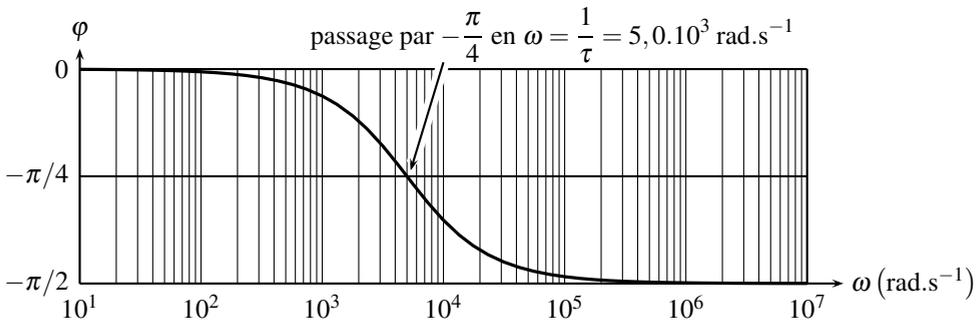
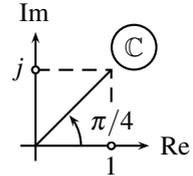


Figure 11.5 – Phase d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où $\tau = 2,0 \cdot 10^{-4}$ s.

b) Passe-haut et dérivateur

L'établissement de la fonction de transfert s'effectue avec la formule du diviseur de tension. Pour le circuit RC (voir figure 11.6) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega},$$

qui s'écrit sous forme canonique, en notant $\tau = RC$ la constante de temps du système :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}, \text{ ou en notation de Laplace } H(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}.$$

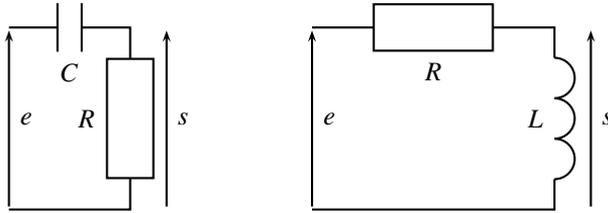


Figure 11.6 – Passe-haut du premier ordre.

De même, pour le circuit RL : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$, qui adopte la même forme avec la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$.

Le dénominateur de la fonction de transfert est la somme de deux termes ; comme pour un passe-bas, 1 est prédominant en module devant $j\tau\omega$ si $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ et $j\tau\omega$ est prédominant en module devant 1 si $\omega \gg \frac{1}{\tau}$. $\frac{1}{\tau}$ est la pulsation caractéristique du système. Deux comportements asymptotiques ou limites apparaissent :

domaines de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau} \ll \omega$
numérateur =	$j\tau\omega$	$j\tau\omega$
dénominateur \simeq	1	$j\tau\omega$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	$j\tau\omega$	1

La phase est immédiatement interprétable dans le plan complexe :

$$\arg(j\tau\omega) = +\frac{\pi}{2} \left(\text{pour } \omega \ll \frac{1}{\tau} \right)$$

$$\arg(1) = 0 \left(\text{pour } \frac{1}{\tau} \ll \omega \right)$$

Quant au gain en décibel, il est nul pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ car $20 \log(1) = 0$ et il vaut pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$:

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |j\tau\omega| = 20 \log(\tau\omega),$$

il devient une décade plus loin :

$$G_{dB}(10\omega) = 20\log(10\tau\omega) = 20\log(\tau\omega) + 20\log(10).$$

Attendu que $\log(10) = 1$, le gain a augmenté de +20 dB en une décade, d'où une pente de +20 dB/décade. En résumé :

domaines de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau} \ll \omega$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	$j\tau\omega$	1
$\varphi(\omega) \simeq$	$\frac{\pi}{2}$	0
pente	+20 dB/décade	nulle

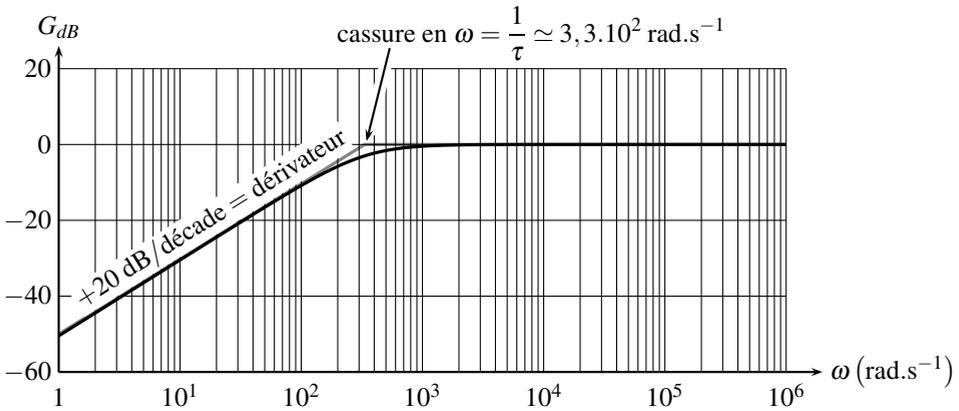


Figure 11.7 – Gain d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où $\tau = 3,0.10^{-3}$ s (les asymptotes sont en gris).

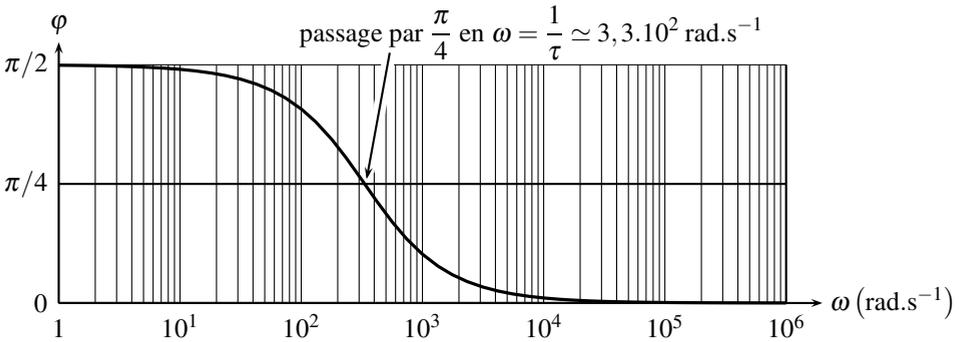


Figure 11.8 – Phase d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où $\tau = 3,0.10^{-3}$ s.

La phase vaut $\frac{\pi}{4}$ en $\omega = \frac{1}{\tau}$: $\underline{H}\left(\frac{j}{\tau}\right) = \frac{j}{1+j}$; $\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) = \arg(j) - \arg(1+j) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Le filtre se comporte en **dérivateur** pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, soit $\omega \ll \frac{1}{10\tau}$. En effet, dans cette zone de fréquence :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \underline{H}(j\omega) \simeq j\tau\omega \quad \text{donc} \quad \underline{s} = j\tau\omega\underline{e},$$

soit en notation temporelle $s(t) = \tau \frac{de}{dt}$.

Un filtre passe-haut se comporte en **dérivateur** pour un signal dont la pulsation est très inférieure à celle du filtre.

c) Complément : autre exemple de filtre passe-bas

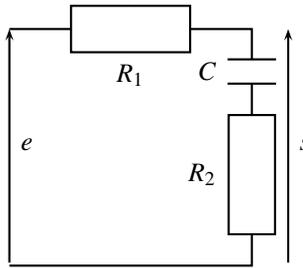


Figure 11.9 – Passe-bas du premier ordre.

On reconnaît un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{R_2}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_{R_1}} = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R_2}{\frac{1}{jC\omega} + R_2 + R_1} = \frac{1 + jR_2C\omega}{1 + j(R_1 + R_2)C\omega}.$$

Ce système présente deux constantes de temps, $\tau_n = R_2C$ au numérateur et $\tau_d = (R_1 + R_2)C$ au dénominateur. Le numérateur et le dénominateur sont simplifiables, en fonction des valeurs de ω par rapport à $\frac{1}{\tau_n}$ et $\frac{1}{\tau_d}$.

domaines de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$	$\frac{1}{(R_1 + R_2)C} \ll \omega \ll \frac{1}{R_2C}$	$\frac{1}{R_2C} \ll \omega$
numérateur \simeq	1	1	$jR_2C\omega$
dénominateur \simeq	1	$j(R_1 + R_2)C\omega$	$j(R_1 + R_2)C\omega$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	1	$\frac{1}{j(R_1 + R_2)C\omega}$	$\frac{R_1}{R_1 + R_2}$
$\varphi(\omega) \simeq$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0
pente	nulle	-20 dB/décade	nulle

Apparaissent alors trois comportements limites, ou asymptotiques, qui correspondent aux trois zones rectilignes du diagramme de Bode (voir figures 11.10 et 11.11).

Comme le montre le tableau de la page suivante, ce filtre se comporte en **intégrateur** dans la zone $\frac{1}{(R_1 + R_2)C} \ll \omega \ll \frac{1}{R_2C}$ car la fonction de transfert est en $\frac{1}{j\tau\omega}$. Toutefois, ce comportement reste peu visible si les deux pulsations limites sont trop proches l'une de l'autre.

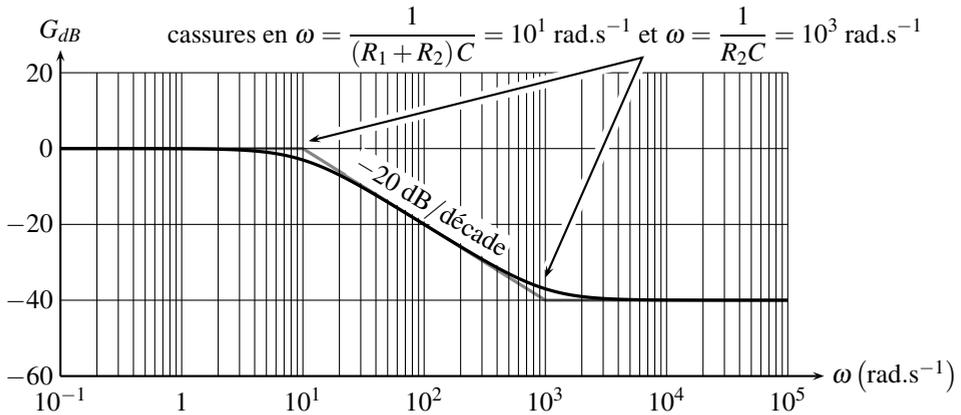


Figure 11.10 – Gain du système avec $R_2C = 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$ et $(R_1 + R_2)C = 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$ (les asymptotes sont en gris).

Sur la figure 11.11, attendu l'étroitesse de la zone asymptotique à $-\frac{\pi}{2}$, la phase ne parvient pas à son expression asymptotique.

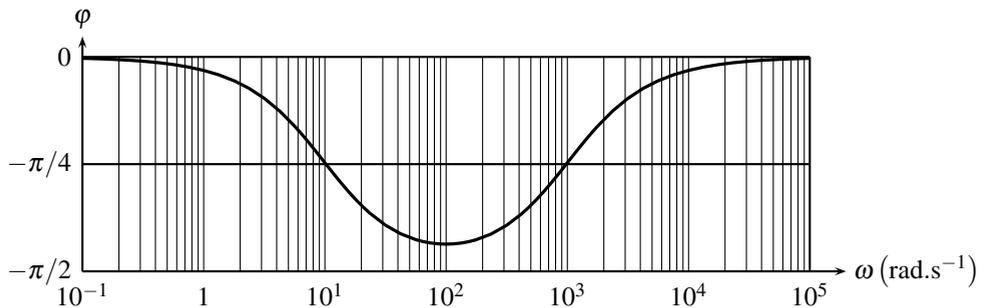


Figure 11.11 – Phase du système avec $R_2C = 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$ et $(R_1 + R_2)C = 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$.

d) Complément : déphaseur

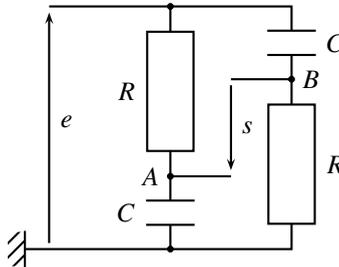


Figure 11.12 – Passe-tout déphaseur du premier ordre.

La sortie est prise entre les nœuds A et B dont les potentiels sont fournis par la formule du diviseur de tensions :

$$V_A = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}(t),$$

$$V_B = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e}(t) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e}(t).$$

Ainsi $\underline{s}(t) = \underline{U}_{BA} = V_A - V_B$:

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} - \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega},$$

qu'on écrit sous forme canonique avec $\tau = RC$, constante de temps du système :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}, \text{ ou en notation de Laplace } H(p) = \frac{1 - \tau p}{1 + \tau p}.$$

Le gain en décibel du système est toujours nul, quelque soit la pulsation, d'où le nom de **passe-tout** : $G_{dB} = 0$. En effet, \underline{H} est le rapport de deux complexes conjugués, donc de même module ; leur rapport vaut 1 et leur log est nul.

La phase, quant à elle, varie. Le numérateur et le dénominateur présentent tous deux la même constante de temps τ , ce qui permet d'asymptotiquement simplifier la fonction de transfert :

domaines de pulsation	$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau} \ll \omega$
numérateur \simeq	1	$-j\tau\omega$
dénominateur \simeq	1	$j\tau\omega$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	1	-1
$\varphi(\omega) \simeq$	0	$-\pi$

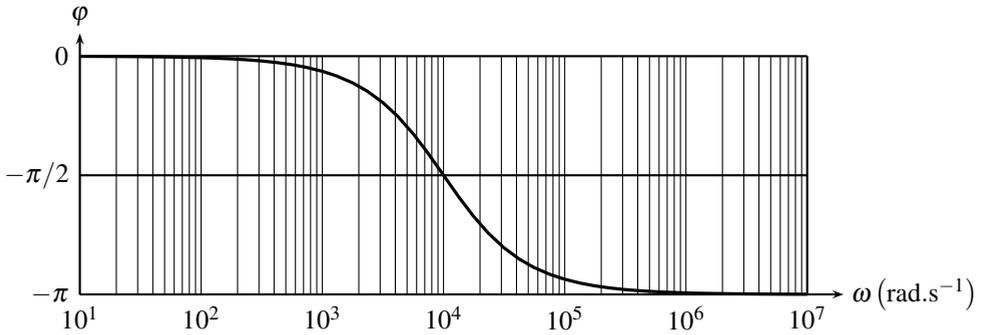


Figure 11.13 – Phase d'un passe-tout déphaseur du premier ordre dans le cas où $\tau = 10^{-4}$ s.

2.2 Filtres du deuxième ordre

a) Passe-bas

Fonction de transfert Avec la formule du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}.$$

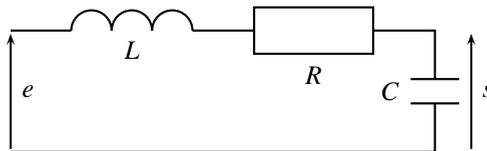


Figure 11.14 – Passe-bas du deuxième ordre.

Avec $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{Q\omega_0}$, la fonction de transfert se met sous forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{ou} \quad H(p) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

Asymptotes Le dénominateur, somme de trois termes, est simplifiable suivant les valeurs de ω par rapport à la pulsation caractéristique ω_0 du système. Si ω est très inférieur à ω_0 , alors les termes en $\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ sont négligeables en module devant 1 ; et si ω est très supérieur à ω_0 , alors le terme prédominant en module est le terme de plus haut degré en $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$:

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega_0 \ll \omega$
dénominateur \simeq	1	$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	1	$\frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2}$

Deux zones rectilignes apparaissent dès lors sur le diagramme de Bode. Pour $\omega \ll \omega_0$, la phase est nulle car $\arg(1) = 0$; pour $\omega \gg \omega_0$:

$$\arg\left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^2 = 2 \arg(\omega_0) - 2 \arg(j\omega) = 0 - 2 \times \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

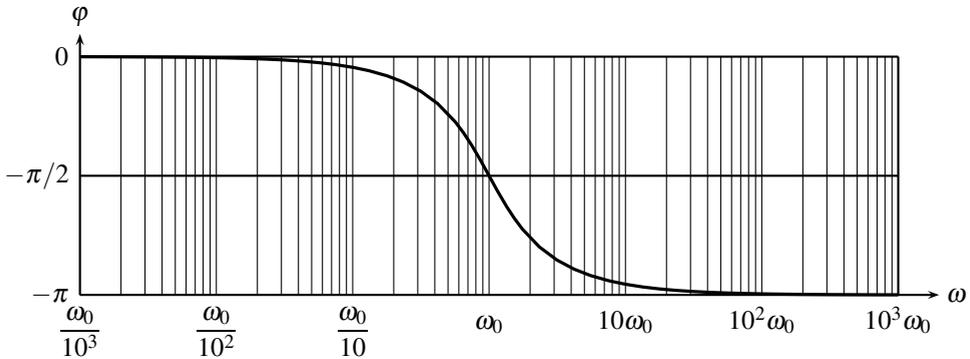


Figure 11.15 – Phase d'un passe-bas du deuxième ordre (tracé pour $\xi = 0,70$).

Quant au gain en décibel, il est nul pour $\omega \ll \omega_0$; pour $\omega \gg \omega_0$:

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right| = 40 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right),$$

il devient une décade plus loin :

$$G_{dB}(10\omega) = 40 \log \left(\frac{\omega_0}{10\omega} \right) = 40 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) - 40 \log(10) = G_{dB}(\omega) - 40.$$

Le gain a diminué de 40 dB en une décade, d'où une pente de **-40 dB/décade**. Une diminution de -40 dB/décade correspond à une amplitude du signal de sortie divisée par 100 lorsque la fréquence est multipliée par 10.

Résonance On observe la possibilité d'une **résonance** si le système est peu amorti, soit $\xi < \sqrt{2}/2$ ou $Q > \sqrt{2}/2$, comme au chapitre sur les régimes harmoniques. Plus ξ est faible, c'est à dire moins le circuit est amorti, plus la résonance est aigue.

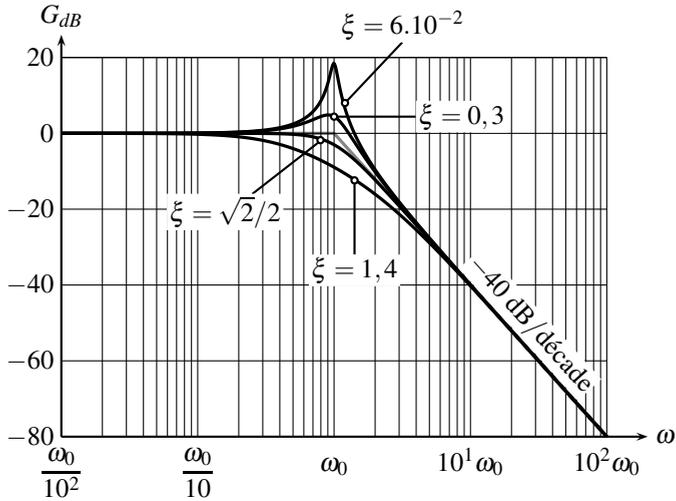


Figure 11.16 – Gain d'un passe-bas du deuxième ordre (les asymptotes sont en gris).

b) Passe-bande

Fonction de transfert Avec la formule du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$$

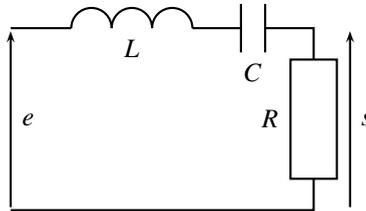


Figure 11.17 – Passe-bande du deuxième ordre.

Avec les paramètres caractéristiques d'un deuxième ordre, $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{Q\omega_0}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{ou} \quad H(p) = \frac{2\xi \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Remarque

Le caractère passe-bande est dû à la mise en série de la bobine et du condensateur. En effet, l'impédance de ce dipôle est : $Z = jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$, qui est nulle en $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$Z(\omega_0) = j\frac{L}{\sqrt{LC}} + \frac{\sqrt{LC}}{jC} = j\sqrt{\frac{L}{C}} - j\sqrt{\frac{L}{C}} = 0.$$

Ainsi, en $\omega = \omega_0$, l'ensemble {bobine + condensateur} est équivalent à un fil de résistance nulle qui relie directement la sortie à l'entrée. La pulsation ω_0 passe donc sans aucune atténuation ni déphasage à travers le filtre.

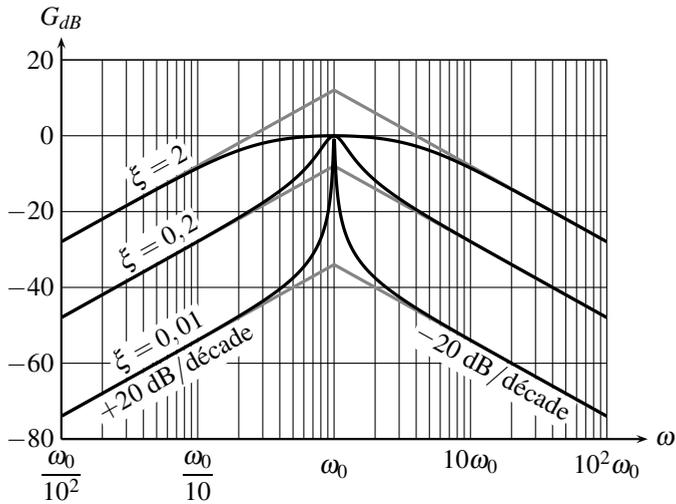


Figure 11.18 – Gain d'un passe-bande du deuxième ordre (les expressions asymptotiques sont en gris).

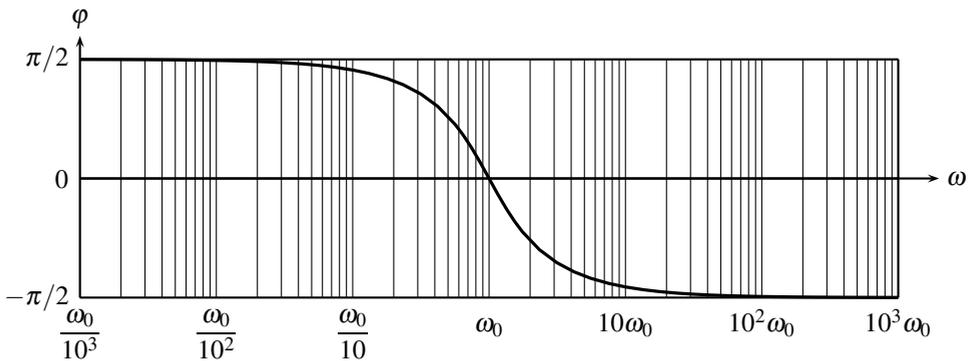


Figure 11.19 – Phase d'un passe-bande du deuxième ordre (tracé pour $\xi = 0,70$).

Asymptotes Le dénominateur, somme de trois termes, est simplifiable suivant les valeurs de ω par rapport à la pulsation caractéristique ω_0 du système. Si ω est très inférieur à ω_0 , alors 1 prédomine et si ω est très supérieur à ω_0 , alors $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ prédomine. Deux zones asymptotiques apparaissent :

domaines de pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega_0 \ll \omega$
numérateur =	$2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}$	$2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}$
dénominateur \simeq	1	$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	$2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}$	$\frac{2\xi \omega_0}{j\omega}$

Pour la phase, si $\omega \ll \omega_0$ alors : $\arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}\right) = +\frac{\pi}{2}$;

et si $\omega \gg \omega_0$: $\arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{2\xi \omega_0}{j\omega}\right) = \arg(2\xi \omega_0) - \arg(j\omega) = 0 - \frac{\pi}{2}$.

Quant au gain en décibel, le terme $j\omega$ impose une pente de +20 dB/décade pour $\omega \ll \omega_0$ et $\frac{1}{j\omega}$ une pente de -20 dB/décade pour $\omega \gg \omega_0$.

domaines de pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega_0 \ll \omega$
$\varphi(\omega) \simeq$	$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
pente	+20 dB/décade	-20 dB/décade

Le passe-bande présente un caractère **dérivateur** pour $\omega \ll \omega_0$ car l'expression asymptotique de la fonction de transfert y est proportionnelle à $j\omega$, et **intégrateur** pour $\omega \gg \omega_0$ à cause du terme en $\frac{1}{j\omega}$.

Résonance Le gain est maximum en $\omega = \omega_0$ et est nul, ainsi que la phase :

$$\underline{H}(j\omega_0) = \frac{2\xi \frac{j\omega_0}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega_0}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega_0}{\omega_0}\right)^2} = 1 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{dB}(\omega_0) = 0 \\ \varphi(\omega_0) = 0. \end{cases}$$

De plus, le gain asymptotique en ω_0 , c'est à dire le gain des asymptotes en ω_0 , vaut :

$$20 \log \left| 2\xi \frac{j\omega_0}{\omega_0} \right| = 20 \log(2\xi) = -20 \log(Q).$$

Moins le filtre est amorti (ξ faible ou Q important), plus les asymptotes se croisent bas sur le diagramme de Bode en gain.

Moins le filtre est amorti (ξ faible ou Q grand), plus il est sélectif, c'est à dire qu'il ne laisse passer d'une bande de fréquence resserrée autour de ω_0 . Cette constatation légitime le nom de **facteur de qualité** donné à Q .

c) Complément : passe-haut

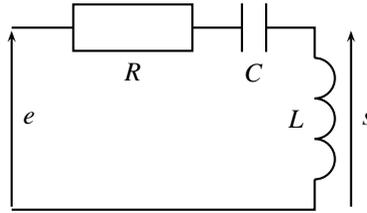


Figure 11.20 – Passe-haut du deuxième ordre.

La formule du diviseur de tension implique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{LC(j\omega)^2}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$$

Avec les paramètres caractéristiques d'un deuxième ordre, ω_0 et ξ (ou $Q = 1/2\xi$) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad \text{ou} \quad H(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\xi\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Le dénominateur d'un deuxième ordre est simplifiable :

domaines de pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega_0 \ll \omega$
numérateur =	$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$	$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$
dénominateur \simeq	1	$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$
$\underline{H}(j\omega) \simeq$	$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$	1

La phase est nulle pour $\omega \gg \omega_0$ car $\arg(1) = 0$. Pour $\omega \ll \omega_0$:

$$\arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 \arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

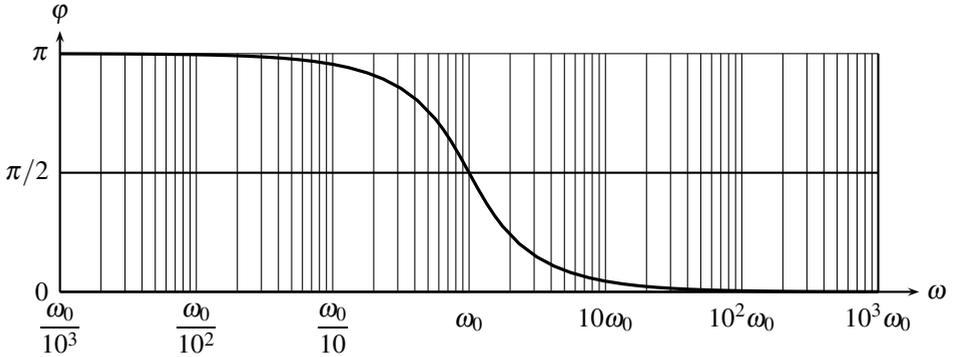


Figure 11.21 – Phase d'un passe-haut du deuxième ordre (tracé pour $\xi = 0,70$).

Quant au gain en décibel, il vaut pour $\omega \gg \omega_0$:

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| = 20 \log(\omega^2) - 20 \log(\omega_0^2) = 40 \log(\omega) - 20 \log(\omega_0^2),$$

il devient une décade plus loin :

$$G_{dB}(10\omega) = 40 \log(10\omega) - 20 \log(\omega_0^2) = 40 \log(\omega) + 40 \log(10) - 20 \log(\omega_0^2)$$

$$G_{dB}(10\omega) = G_{dB}(\omega) + 40.$$

Le gain a augmenté de 40 dB en une décade, d'où une pente de **+40 dB/décade**.

Un phénomène de **résonance** est visible dès que $\xi < \sqrt{2}/2$ ou $Q > \sqrt{2}/2$. Plus ξ est faible (ou Q important), moins le système est amorti, plus la résonance est aigue.

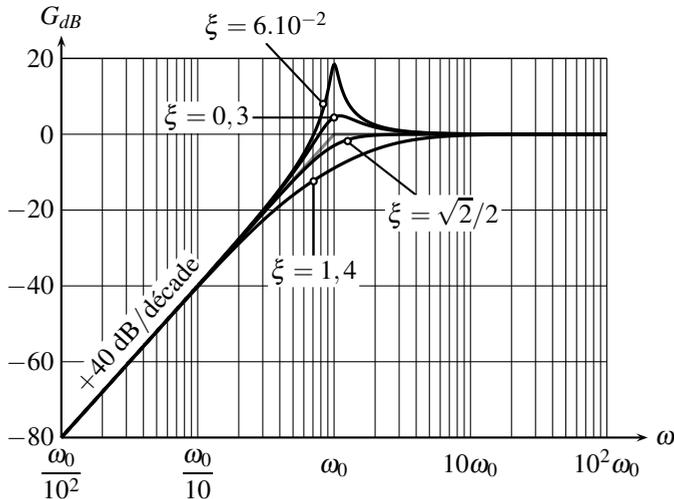


Figure 11.22 – Gain d'un passe-haut du deuxième ordre (les asymptotes sont en gris).

d) Complément : coupe-bande

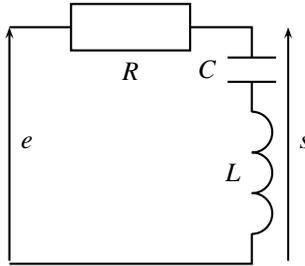


Figure 11.23 – Coupe-bande du deuxième ordre.

Avec la formule du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 + LC(j\omega)^2}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$$

Le numérateur de la fonction de transfert s'annule pour :

$$1 - LC\omega^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

ce qui entraîne un zéro de transmission à cette pulsation.

Le caractère coupe-bande est dû à la mise en série de la bobine et du condensateur à la sortie.

L'impédance de ce dipôle s'annule en $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$\underline{Z}(\omega_0) = jL\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0} = 0.$$

Ainsi, en $\omega = \omega_0$, l'ensemble {bobine + condensateur} est équivalent à un fil de résistance nulle qui court-circuite la sortie. La pulsation ω_0 est donc complètement éliminée par le filtre.

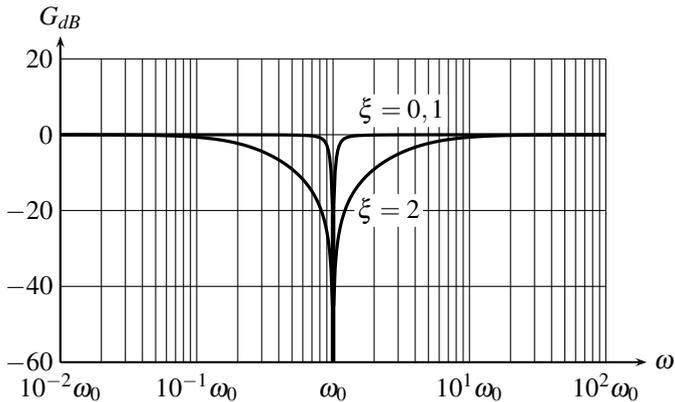


Figure 11.24 – Gain d'un coupe-bande du deuxième ordre.

Moins le filtre est amorti (ξ faible ou Q grand), plus il est sélectif, c'est à dire que la bande de fréquence éliminée est resserrée autour de ω_0 . Cette constatation légitime le nom de facteur de qualité donné à Q .

2.3 Récapitulatif

Comment interpréter systématiquement les zones rectilignes des diagrammes de Bode ? Il suffit :

- d'identifier les pulsations caractéristiques des numérateur et dénominateur,
- de préciser chaque intervalle de pulsation entre ces pulsations caractéristiques,
- de simplifier numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert en ne gardant que le terme prédominant, dans chaque intervalle de pulsation,
- d'interpréter l'expression asymptotique ainsi obtenue en se souvenant du tableau de correspondances, appelé relations de Bayard-Bode :

$\underline{H}_{asymptotique}$	phase	pente	comportement	réalisation pratique
$j\tau\omega$ ou τp	$+\frac{\pi}{2}$	+20 dB/décade	dérivateur	passé-haut premier ordre passé-bande deuxième ordre
$\frac{1}{j\tau\omega}$ ou $\frac{1}{\tau p}$	$-\frac{\pi}{2}$	-20 dB/décade	intégrateur	passé-bas premier ordre passé-bande deuxième ordre

$\underline{H}_{asymptotique}$	phase	pente	réalisation pratique
$(j\tau\omega)^2$ ou $(\tau p)^2$	$+\pi$	+40 dB/décade	passé-haut deuxième ordre
$\frac{1}{(j\tau\omega)^2}$ ou $\frac{1}{(\tau p)^2}$	$-\pi$	-40 dB/décade	passé-bas deuxième ordre

$\underline{H}_{asymptotique}$	phase	pente
1	0	nulle
-1	$-\pi$	nulle

3 Gabarit (PTSI)

3.1 Amplitude

La fonction d'un système est de récupérer le signal utile puis de le manipuler pour en retirer une information précise. Par exemple un téléphone portable capte une seule communication au sein d'un grand nombre de signaux électromagnétiques ; puis il traite l'information contenue dans ce signal pour la transformer, *in fine*, en signal sonore. Le système devrait donc idéalement éliminer tous les signaux inutiles pour transmettre, sans atténuation ni déphasage, le signal utile, puis traiter l'information. Il est alors nommé **filtre** car il filtre certains signaux.

Les systèmes réels ne présentent toutefois pas de telles performances. En particulier, le signal qu'ils laissent passer est légèrement atténué et déphasé ; de plus, le passage entre les

fréquences transmises et les fréquences absorbées n'est pas brutal, mais progressif.

On est donc amené à définir un gabarit du filtre à construire. Un filtre **passé-bas** a pour fonction de laisser passer toutes les fréquences inférieures à f_p (indice p pour passante) et d'éliminer toutes les fréquences supérieures à f_a (indice a pour atténuée). On définit alors :

- la dernière **fréquence passante** f_p (le filtre doit laisser passer les fréquences $f < f_p$),
- le **gain minimum** G_{sup} , en dB, pour les fréquences qui passent à travers le filtre (il ne doit pas être trop faible, car ces fréquences doivent sortir du filtre sans être atténuées),
- la première **fréquence atténuée** f_a (toutes les fréquences $f > f_a$ doivent être éliminées par le filtre),
- le **gain maximum** G_{inf} pour les fréquences atténuées. Le gain du filtre à ces fréquences doit être inférieur à G_{inf} pour être sûr qu'elles soient éliminées.

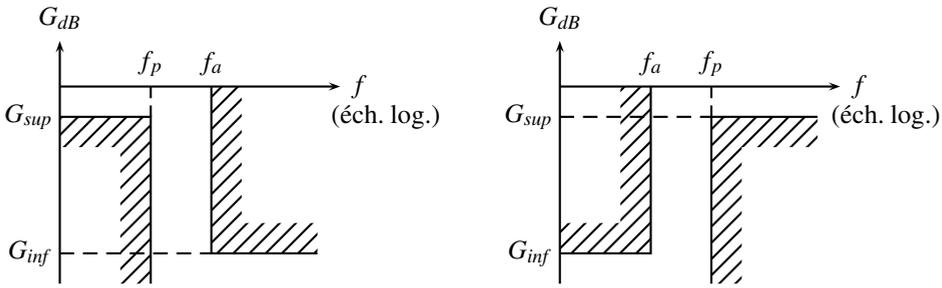


Figure 11.25 – Gabarit (a) d'un passe-bas (b) d'un passe-haut.

Par exemple, si on choisit $G_{inf} = -60$ dB, alors :

$$20 \log \left| \frac{s}{e} \right| < -60 \quad \text{donc} \quad |s| < |e| \times 10^{-3}.$$

L'amplitude des fréquences supérieures à f_a sont au moins divisées par 1000; elles sont effectivement atténuées par le filtre.

Et si on décide que $G_{sup} = -3$ dB, en ne dépassant pas 0 dB pour les fréquences transmises :

$$0 > 20 \log \left| \frac{s}{e} \right| > -3 \quad \text{donc} \quad |e| > |s| > |e| \times 0,71.$$

L'amplitude des fréquences inférieures à f_p diminue peu.

La plage de fréquences utiles, qui passent à travers le filtre, ici l'intervalle $[0, f_p]$, est nommée **bande passante** à G_{sup} . Dans cette définition, la valeur la plus souvent retenue pour G_{sup} est -3 dB, mais on rencontre aussi, plus rarement, -6 dB.

En résumé, une **passé-bas** transmet les basses fréquences et atténue les hautes. C'est le contraire pour un **passé-haut** (voir figure 11.25), qui atténue les basses fréquences, inférieures à f_a , et laisse passer les hautes, supérieures à f_p . On définit de même pour ce filtre le gain maximum G_{inf} pour les fréquences atténuées, le gain minimum G_{sup} pour les fréquences transmises, la bande passante $[f_p, +\infty[$ à G_{sup} .

Une autre donnée importante qui intervient dans le gabarit du filtre, est la régularité de sa réponse dans sa bande passante. Le gain y varie-t-il rapidement ? Y a-t-il une **résonance** ? Ce phénomène n'existe que pour les systèmes au moins d'ordre deux. Elle est à éviter si on ne souhaite pas amplifier une zone autour de la fréquence de résonance. On augmentera alors le coefficient d'amortissement ξ du filtre afin de l'éliminer.

Il convient de compléter la taxinomie des filtres par le **passé-bande** et le **coupe-bande**, aussi nommé **réjecteur de bande** (voir figure 11.26).

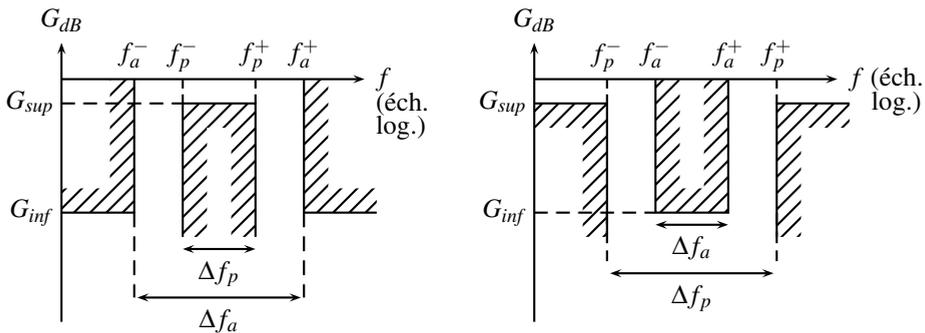


Figure 11.26 – Gabarit (c) d'un passe-bande (d) d'un coupe-bande.

Le **passé-bande** ne laisse passer qu'une bande de fréquence et atténue toutes les autres. Les fréquences comprises dans $[f_p^-, f_p^+]$ passent à travers le filtre, avec un gain G_{sup} , qui ne doit pas être trop faible pour qu'elles ne soient pas atténuées. Les fréquences inférieures à f_a^- ou f_a^+ sont atténuées, avec un gain inférieur à G_{inf} qu'on prendra suffisamment négatif.

Quant au **coupe-bande**, il atténue les signaux dont les fréquences sont comprises entre f_a^- et f_a^+ et laisse passer les autres.

3.2 Phase

La paragraphe précédent s'intéressait à l'atténuation en amplitude d'une partie du signal, pour ne laisser passer à travers le système que la partie utile du signal. Mais tout filtre introduit un certain déphasage, qui dépend de la fréquence, y compris dans sa bande passante. Ce déphasage est équivalent à un décalage temporel. En effet, pour un signal sinusoïdal $s(t)$:

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \psi) = S_0 \cos\left(\omega\left(t + \frac{\psi}{\omega}\right)\right) = S_0 \cos(\omega(t + \Delta t)),$$

le déphasage ψ est équivalent au décalage $\Delta t = \frac{\psi}{\omega}$ introduit sur le signal lors du passage dans le filtre.

Dès lors, si un signal, composé de plusieurs fréquences, passe à travers un filtre, chacune de ses harmoniques est déphasée différemment et arrive en sortie du filtre avec un retard différent.

On ne sait pas construire de filtre analogique simple qui présente simultanément un filtrage idéal en amplitude sans déformer le signal utile par déphasage. On construit donc en pratique

les filtres en ne tenant compte que du gabarit en gain, sans tenir compte de la déformation due au déphasage.

Toutefois, si le déphasage devient primordial, en particulier si le régime transitoire du filtre est important, on construira un filtre qui présente une grande régularité en déphasage, c'est-à-dire un retard Δt identique pour chaque fréquence, en s'accommodant de la piètre qualité du filtrage.

3.3 Exemple de réalisation d'un gabarit

Tous les filtres servent à assurer une fonction exposée dans un cahier des charges. Il convient de choisir le bon filtre qui entre dans le gabarit souhaité.

On cherche, par exemple, à effectuer le filtrage passe-bas suivant (voir figure 11.27) :

- les pulsations jusqu'à $1,2 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ doivent passer à travers le filtre, sans être amplifiées, et ne pas être atténuées de plus de 3 dB,
- les pulsations supérieures à $3,9 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ doivent être filtrées et atténuées d'au moins 15 dB.

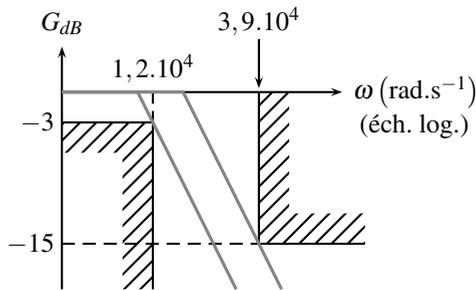


Figure 11.27 – Gabarit du filtre et gains asymptotiques limites en gris.

Quel est l'ordre du filtre à utiliser ? On le détermine avec la pente minimale dans la zone de transition, ici $[1,2 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}; 3,9 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}]$:

- combien de décade y a-t-il dans la zone de transition ? La fréquence entre le début et la fin de cette zone est multipliée par :

$$\frac{3,9 \cdot 10^4}{1,2 \cdot 10^4} = 3,25.$$

Un décade correspond à la fréquence multipliée par 10 ; il y a donc 0,325 décade dans la zone de transition.

- L'atténuation dans la zone de transition est au minimum de :

$$A = -15 - (-3) = -12 \text{ dB.}$$

- La pente minimale vaut donc :

$$p = \frac{-12}{0,325} = -36,9 \text{ dB/décade.}$$

- un premier ordre a une pente insuffisante de -20 dB/décade, on utilise donc un deuxième ordre de pente -40 dB/décade.

Quelle est la pulsation caractéristique ? Plusieurs choix sont possibles. Sur le gabarit, sont tracés en gris les deux diagrammes asymptotiques limites du deuxième ordre qui répondent au cahier des charges. ω_0 est calculé avec l'expression asymptotique de la fonction de transfert et les coordonnées d'un point du gabarit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \simeq \left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^2 \quad \text{pour } \omega \gg \omega_0.$$

Si l'on choisit le filtre qui coupe le plus tôt, à savoir qui passe par $\omega = 1,2 \cdot 10^4$ rad.s $^{-1}$ et -3 dB :

$$20 \log \left| \left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^2 \right| = 40 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = -3 \quad \text{implique } \omega_0 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Dans l'autre cas limite qui coupe le plus tard et passe par $\omega = 3,9 \cdot 10^4$ rad.s $^{-1}$ et -15 dB :

$$40 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = -15 \quad \text{implique } \omega_0 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}.$$

La pulsation caractéristique sera choisie entre ces deux valeurs limites.

3.4 Cahier des charges

Quel type de filtre choisir et quel gabarit imposer ? La réponse dépend de l'information cherchée dans un ou plusieurs signaux. Si on souhaite :

- récupérer une fréquence particulière, par exemple pour choisir une station de radio parmi d'autres, on utilise un **passé-bande**, centré sur la fréquence utile,
- éliminer une fréquence, on utilise un **coupe-bande**, centré sur la fréquence à éliminer,
- le dériver, on utilise un **passé-haut** bien choisi,
- l'intégrer, on utilise un **passé-bas**.

Et, ce qui est étudié en détail dans le prochain chapitre, si on souhaite :

- éliminer la valeur moyenne du signal, on utilise un **passé-haut**,
- recueillir l'information sur la forme générale du signal, on utilise un **passé-bas**,
- recueillir l'information relative aux détails du signal, on utilise un **passé-haut**.
- moyenniser un signal, on utilise un **passé-bas** très sélectif.

Exemple

L'émetteur qui assure la diffusion de France-Inter sur les grandes ondes, transmet deux signaux autour de $f_0 = 162$ kHz, comme on le voit sur la figure 11.28 :

- un signal analogique qui contient des informations sonores. Il occupe une bande de fréquence comprise entre 50 Hz et 5 kHz de chaque côté de f_0 , donc les intervalles [112 kHz ; 161,5 kHz] et [162,5 kHz ; 212 kHz] ;
- un signal numérique qui porte des informations horaires (date et heure légale). C'est ce signal qui permet de synchroniser les horloges des gares ou les dispositifs radio-

commandés des particuliers. Il occupe une bande de fréquence de largeur 80 Hz, centrée en f_0 , soit l'intervalle [161,6 kHz ; 162,4 kHz].

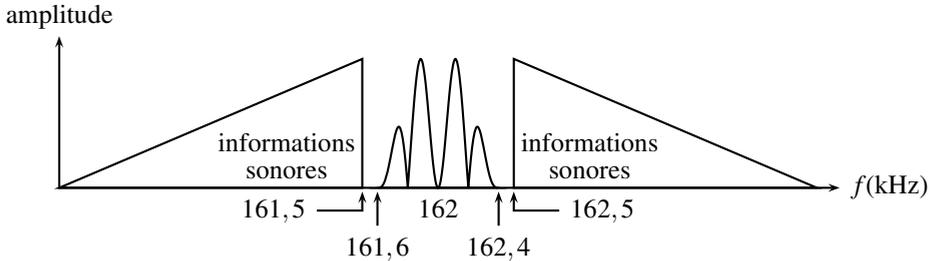


Figure 11.28 – Spectre du signal France-Inter (échelle horizontale non respectée pour des raisons de clarté)

Comment récupérer le signal horaire ? On utilise un passe-bande, qui élimine le signal analogique avec $f_a^- = 161,5$ kHz et $f_a^+ = 162,5$ kHz, mais laisse passer le signal numérique avec $f_p^- = 161,6$ kHz et $f_p^+ = 162,4$ kHz. On choisit $G_{sup} = -3$ dB afin que les signaux utiles ne soient que peu atténués et $G_{inf} = -40$ dB afin de diviser le signal analogique par 10^2 pour le filtrer. Les bandes de transition de ce filtre n'ont qu'une largeur de 0,1 kHz, ce qui est faible par rapport à $f_0 = 162$ kHz. Dans la pratique, un prétraitement du signal sera effectué avant son filtrage.

D'une manière générale, plus le filtre tend vers un filtre parfait (pas d'atténuation dans la bande passante, atténuation infinie dans la bande rejetée, passage net de la bande passante à la bande atténuée, c'est à dire bande de transition étroite, f_a proche de f_p par exemple), plus le filtre sera compliqué, construit avec de nombreux éléments.

SYNTHÈSE*SAVOIRS*

- fonction de transfert
- diagramme de Bode
- notion de gabarit
- passe-bas du premier ordre
- passe-haut du premier ordre
- passe-bas du deuxième ordre
- passe-haut du deuxième ordre

SAVOIR-FAIRE

- utiliser les échelles logarithmiques
- interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après la fonction de transfert
- établir un gabarit en fonction du cahier des charges (PTSI)
- expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en dérivateur
- expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en intégrateur

MOTS-CLÉS

- | | | |
|----------------------------|--------------|---------------|
| • fonction de transfert ou | • gabarit | • dérivateur |
| transmittance | • passe-bas | • intégrateur |
| • diagramme de Bode | • passe-haut | |